無限次元モジュライ空間の平均次元とコルモゴロフ複雑性

松尾 信一郎*
東京大学大学院数理科学研究科

2010 年度秋季総合分科会（名古屋大学）

概要

非コンパクト四次元多様体上の無限エネルギー反自己双対接続のなす無限次元モジュライ空間を Gromov の平均次元と Kolmogorov の複雑性の観点から研究した．

1　序

わたしを魅了する二つのことがある．幾何に由来する非線型偏微分方程式の解析と野性的な空間のトポロジーである．わたしは不等式と無限次元空間が好きなのだ．

さて，反自己双対方程式は四次元多様体の幾何に由来する非線型偏微分方程式である．その解を反自己双対接続と呼ぶ．Atiyah-Hitchin-Singer [1] は，コンパクト四次元多様体上の反自己双対接続のなすモジュライ空間に自然な位相を与え，それが滑らかな有限次元多様体になりえることを看破した．この結果は Donaldson [2] に代表される現在のゲージ理論の礎である．彼らの研究をコンパクトな多様体から非コンパクトな多様体に拡張することは自然な流れであろう．もちろん，非コンパクト多様体ではその非コンパクト性に由来する解析的な困難があり，その拡張は一筋縄では行かない．だが，非コンパクト多様体の無限遠での反自己双対接続の挙動を巧みに制御し，その解析的な困難を回避することで，非コンパクト多様体のときでもコンパクト多様体のときと平行した議論ができる場合がある．これは重要な観点であり，多くの素晴らしい研究がなされてきた．例えば，Taubes [11] は，ある特別な条件を充たす非コンパクト四次元多様体では Donaldson[2] などと平行した議論が可能であることを示し，その系として四次元 Euclid 空間に非可算個の微分構造が入ることを示した．

しかし，非コンパクト多様体の非コンパクト性を積極的に活用することで，コンパクト多様体における状況とは直交した研究をすることもありえるのではなかろうか．例えば，無限エネルギー反自己双対接続は非コンパクト四次元多様体に固有の現象である．京都大学の塚本真輝氏と講演者は，論文 [10] において，非コンパクト四次元多様体上の無限エネルギー反自己双対接続のなすモジュライ空間を研究した．我々のモジュライ空間はコンパクトかつ無限次元の位相空間である．コンパクト無限次元空間には，現行のいかなる意味でも多様体の構造を入れることができないし，CW 複体の構造すら入らない．ところで，そもそも，無限次元空間のように野性的な空間の研究は五里霧中の荒野であり，一番難しいことは優れた問題設定を与えることである．そこに Gromov が豊穣な研究領域の存在を喝破した．「無限次元空間の次元」としての**平均次元**である．そして，我々は非コンパクト四次元多様体上の無限エネルギー反自己双対接続のなすモジュライ空間を平均次元の観点から研究した．Atiyah-Hitchin-Singer の主定理 [1, Theorem 6.1.] は**コンパクト**四次元有向反自己双対正スカ

* exotic@ms.u-tokyo.ac.jp

ラー曲率 Riemann 多様体上の反自己双対接続のモジュライ空間の次元公式であり，論文 [10] の主定理は**非コンパクト**四次元有向反自己双対一様正スカラー曲率 Riemann 多様体の最も基本的な例である $S^3 \times \mathbb{R}$ 上の無限エネルギー反自己双対接続のモジュライ空間の平均次元公式である．この研究は「無限エネルギーゲージ理論」への第一歩をまさに踏み出したところである，と言いたい．そして，Gromov の平均次元の射程を見据えようとする試みの中で，計算論や数学基礎論において研究されている概念である **Kolmogorov 複雑性**との関連もわかってきた．無限次元空間をたくさんの不等式により研究できて，わたしは幸せである．

今回のまとめ

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z} \curvearrowright \textbf{非コンパクト}\ \text{四次元多様体}\ X \arrow[d, rightsquigarrow, "\text{反自己双対接続のモジュライ空間}"] & \\
 & \mathbb{Z} \curvearrowright \textbf{コンパクト}\ \text{無限次元 距離化可能空間}\ \mathcal{M}_d \arrow[dl, rightsquigarrow, "\text{平均軌道複雑性}"'] \arrow[dr, rightsquigarrow, "\text{平均次元}"] & \\
MK([A]:\mathbb{Z}) & & \dim(\mathcal{M}_d:\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

2　無限次元モジュライ空間と平均次元

塚本真輝氏と講演者は，論文 [10] において，非コンパクト四次元多様体上の無限エネルギー反自己双対接続のなすモジュライ空間を Gromov の平均次元の観点から研究した．この節ではその主定理を紹介する．

平均次元の定義や性質については第 3 節で，ゲージ理論の用語については第 5 節で，主定理の証明の概略については第 6 節で，それぞれ扱われている．

$X := S^3 \times \mathbb{R}$ として，S^3 の定曲率計量と $\mathbb{R}$ の標準計量の直積計量を与える．$P := X \times \mathrm{SU}(2) \to X$ を自明束とする．d を非負実数とせよ．**無限エネルギー反自己双対接続のなすモジュライ空間** $\mathcal{M}_d$ **(moduli space of infinite energy ASD connections)** を，次の二条件を課したゲージ同値類 $[\mathbf{A}]$ の集合として定義する：

1. $\mathbf{A}$ は P 上の反自己双対接続である．
2. $\mathbf{A}$ は曲率条件

$$\|F_{\mathbf{A}}\|_{L^\infty} := \sup_{x \in X} |F_A(x)| \leq d$$

を充たす．

ここで，接続 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ がゲージ同値であるとは，ゲージ変換（= 束写像）$g\colon P \to P$ が存在して，$g(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$ が成り立つことである．条件 2. では，L^2 ノルムではなく，L^∞ **ノルム**を用いていることに注意していただきたい．

$d = 0$ のとき，$\mathcal{M}_0$ は平坦接続のゲージ同値類だけからなる一点集合である．また，$d_1 \leq d_2$ ならば，$\mathcal{M}_{d_1}$ は $\mathcal{M}_{d_2}$ に含まれる．従って，任意の非負実数 d に対して，$\mathcal{M}_d$ は空ではない．

モジュライ空間 $\mathcal{M}_d$ には広義一様収束の位相を与える．すると，Uhlenbeck コンパクト性より，$\mathcal{M}_d$ は距離化可能コンパクト位相空間である．また，十分大きい $d \gg 0$ に対して，$\mathcal{M}_d$ の被覆次元は無限大である．

無限巡回群 $\mathbb{Z}$ は X に平行移動として連続に作用し，その作用は自明束 P に持ち上がる．そして，反自己双対接続であることと曲率条件はゲージ変換で不変な条件なので，結局，$\mathbb{Z}$ は $\mathcal{M}_d$ にも作用する：

$$\mathcal{M}_d \times \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_d, \quad ([\mathbf{A}], \gamma) \mapsto [\gamma^* \mathbf{A}].$$

ただし，γ^* は $\gamma\colon P \to P$ による引き戻しである．この作用は連続であることがわかる．

さて，Gromov の**平均次元 (mean dimension)** とは，無限巡回群 $\mathbb{Z}$ が連続に作用する距離化可能コンパクト位相空間の位相不変量である．従って，$\mathcal{M}_d$ の平均次元 $\dim(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z})$ を考えることができる．

定理 1. [10, Theorem 1.1.]

$$\dim(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) \lneqq \infty.$$

さらに，$d \to \infty$ のとき，$\dim(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) \to \infty.$

すなわち，モジュライ空間 $\mathcal{M}_d$ の被覆次元は無限大だが，平均次元ならば有限である．しかも，$d \to \infty$ のときの漸近挙動から，その平均次元は自明ではない．

そして，さらなる精密な評価も得られる．P 上の反自己双対接続 $\mathbf{A}$ に対して，その**平均エネルギー (mean energy)** を

$$\rho(\mathbf{A}) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{8\pi^2 T}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{S^3\times[t,t+T]} |F_{\mathbf{A}}|^2 \, d\mathrm{vol}\right)$$

と定義する．$F_{\mathbf{A}}$ の L^∞ ノルムが有限ならば，この極限は常に有限確定値として存在する．そして，$\|F_{\mathbf{A}}\|_{L^\infty} \leq d$ となる P 上の反自己双対接続 $\mathbf{A}$ に対する $\rho(\mathbf{A})$ の上限を $\rho(d)$ とする．また，$S^3 \times S^1$ 上のインスタントンを被覆写像 $X = S^3 \times \mathbb{R} \to S^3 \times S^1$ により引き戻して得られる P 上の反自己双対接続を，**周期的反自己双対接続 (periodic ASD connections)** と呼ぶ．$\|F_{\mathbf{A}}\|_{L^\infty} < d$ となる周期的反自己双対接続 $\mathbf{A}$ に対する $\rho(\mathbf{A})$ の上限を $\rho_{peri}(d)$ とする．我々は**局所平均次元 (local mean dimension)** を導入し，$\mathcal{M}_d$ の局所平均次元を評価した．

定理 2. [10, Theorem 1.2.] 任意の $[\mathbf{A}] \in \mathcal{M}_d$ に対して，

$$\dim_{[\mathbf{A}]}(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) \leq 8\rho(\mathbf{A})$$

が成り立つ．さらに，$\mathbf{A}$ が $\|F_{\mathbf{A}}\|_{L^\infty} < d$ となる周期的反自己双対接続ならば，

$$\dim_{[\mathbf{A}]}(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) = 8\rho(\mathbf{A})$$

が成り立つ．従って，$\mathcal{M}_d$ の局所平均次元 $\dim_{loc}(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z})$ は，

$$8\rho_{peri}(d) \leq \dim_{loc}(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) \leq 8\rho(d)$$

を充たす．

3　平均次元入門

この節では，まずは Gromov[4] による**平均次元**を解説し，次にその派生である**局所平均次元**と**平均エントロピー次元**を紹介する．これらは全て「無限次元空間の次元」である．

3.1　平均次元

まずは Gromov [4] による**平均次元 (mean dimension)** を解説する．それは「無限次元空間の次元」であり，従順群が連続に作用する距離化可能コンパクト位相空間の位相不変量である．簡単のため，従順群としては無

限巡回群 $\mathbb{Z}$ のみを扱うことにする．被覆次元の定義など次元論の基礎については数学辞典を参照のこと．
さて，厳密な定義をする前に，まずは最も基本的で最も重要な例を挙げる．

例 3. N 次元 Euclid 空間の単位閉球を B とする．$B^{\mathbb{Z}}$ を B の両側無限直積として，直積位相を与える．すると，Tikhonov の定理により，$B^{\mathbb{Z}}$ は距離化可能コンパクト位相空間である．$B^{\mathbb{Z}}$ の被覆次元は無限大になる．また，添字のずらしにより，無限巡回群 $\mathbb{Z}$ は $B^{\mathbb{Z}}$ に連続に作用する．Gromov の平均次元は，$\mathbb{Z}$ が連続に作用する距離化可能コンパクト位相空間の位相不変量なので，$B^{\mathbb{Z}}$ の平均次元 $\dim(B^{\mathbb{Z}}:\mathbb{Z})$ を考えることができる．このとき，

$$\dim(B^{\mathbb{Z}}:\mathbb{Z})=N$$

である．特に，$N=1$ のとき，$\dim([0,1]^{\mathbb{Z}}:\mathbb{Z})=1$ である．

確かに $B^{\mathbb{Z}}$ の次元は無限大だが，$\mathbb{Z}$ の「個数」を $|\mathbb{Z}|$ とすれば，直観的には，その無限の「大きさ」は $\dim B\times|\mathbb{Z}|$ としてもよいだろう．そして，平均次元 $\dim(B^{\mathbb{Z}}:\mathbb{Z})$ とは，群作用による $\dim B^{\mathbb{Z}}$ の平均化の操作であり，直観的には，

$$\dim(B^{\mathbb{Z}}:\mathbb{Z})=\frac{\dim B^{\mathbb{Z}}}{|\mathbb{Z}|}=\frac{\dim B\times|\mathbb{Z}|}{|\mathbb{Z}|}=\dim B=N$$

ということである．ちなみに，これは $\dim(B^{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z})$ ではない．

では，平均次元に厳密な定義を与える．それは力学系での位相的エントロピーの定義に似ている．(X,d) をコンパクト距離空間とせよ．

定義 4. $\epsilon\geq 0$ を非負実数とする．位相空間 Y と連続写像 $f\colon X\to Y$ に対して，f が **ϵ-埋め込み (ϵ-embedding)** であるとは，$\mathrm{Diam}_d\left(f^{-1}(y)\right)\leq\epsilon$ が任意の点 $y\in Y$ で成り立つこととする．

すなわち，ϵ 程度の誤差を許容すれば，f は埋め込みになるということである．また，$\epsilon=0$ のとき，ϵ-埋め込みとは普通の埋め込みのことである．

定義 5. 各正実数 $\epsilon>0$ に対して，n 次元多面体 P と ϵ-埋め込み $f\colon X\to P$ が存在する自然数 n の最小値のことを，(X,d) の**幅次元 (width dimension)** とよび，$\mathrm{Widim}_\epsilon(X,d)$ と書く．

すなわち，幅次元とは，ϵ 以下の細かいものを無視して見たときの X の巨視的な次元である．また，X はコンパクトだったので，たとえ被覆次元が無限大でも，幅次元は常に有限である．$\epsilon\to 0$ のとき，幅次元は単調増大であり，被覆次元に収束する：

$$\lim_{\epsilon\to 0}\mathrm{Widim}_\epsilon(X,d)=\dim X.$$

例えば，$0<\epsilon<1$ に対して，$X:=[0,1]\times[0,\epsilon]$ として，d を Euclid 距離とする．このとき，自然な射影 $X\to[0,1]$ は ϵ-埋め込みである．さらに，0 次元多面体 (= 点) への X からの ϵ-埋め込みが存在しないことは定義からすぐに従うので，$\mathrm{Widim}_\epsilon(X,d)=1$ となる．
次に，基本的で重要な例を挙げる．

例 6. $X:=[0,1]^N$, $d(x,y):=d_\infty(x,y)=\max_i|x_i-y_i|$ とするとき，各 $0<\epsilon<1$ に対して，

$$\mathrm{Widim}_\epsilon([0,1]^N,d_\infty)=N$$

が成り立つ．この例の深い点は $\epsilon<1$ という評価が N には依存しないことである．証明は，上からの評価は易しいが，下からの評価は難しい．本質は Brouwer の不動点定理である．詳細は [10, Lemma 2.1.] などにある．

さて，ここからは群作用を考える．無限巡回群 $\mathbb{Z}$ が X に連続に作用しているとせよ．$k \in \mathbb{Z}$ の $x \in X$ への作用を $k \cdot x$ とあらわす．

定義 7. 各自然数 N に対して，X 上の新しい距離 d_N を

$$d_N(x, y) := \max_{|k|<N} d(k \cdot x, k \cdot y)$$

と定める．

X はコンパクトだったので，(X, d) と (X, d_N) とは同相になる．特に，(X, d_N) はコンパクトである．ここで重要な観点は，群作用によるくりこみで距離空間の無限系列を系統的に作り出せるということである．

定義 8.

$$\mathrm{Widim}_\epsilon((X, d) : \mathbb{Z}) := \lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{Widim}_\epsilon(X, d_N)}{2N - 1}$$

いわゆる Ornstein-Weiss の補題により，この極限は有限確定値として常に存在する．証明は [10, Lemma 2.5.] などにある．

そして，平均次元 $\dim(X : \mathbb{Z})$ は次で定義される．

定義 9.

$$\dim(X : \mathbb{Z}) := \lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{Widim}_\epsilon((X, d) : \mathbb{Z}).$$

幅次元や $\mathrm{Widim}_\epsilon((X, d) : \mathbb{Z})$ などは距離に依存しているが，平均次元は X の位相と両立する距離の取り方とは独立である．つまり，(X, d) と (X, d') が同相ならば，

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{Widim}_\epsilon((X, d) : \mathbb{Z}) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{Widim}_\epsilon((X, d') : \mathbb{Z})$$

が成り立つ．これは，X のコンパクト性から恒等写像 $id \colon (X, d) \to (X, d')$ が一様連続になることよりわかる．我々が考察する位相空間は，たとえ距離化可能であったとしても，その位相と両立する距離を標準的に選び出す方法がないことが多い．従って，この性質は重要である．

また，平均次元は，非負実数か無限大になるが，自然数とは限らない．

さて，一体全体この定義は何なのだろうか．例 3 を思い出す．閉区間 $[0, 1]$ の両側無限直積 $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ に直積位相を与えたものには，無限巡回群 $\mathbb{Z}$ が連続に作用して，このとき，$\dim([0, 1]^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}) = 1$ だった．この例の直観的意味をもう少し考えてみる．

$0 < \delta < 1$ を固定するとき，

$$d(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta^{|n|} \, |x_n - y_n|$$

は $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ の位相を実現する距離である．ここで，$n \neq 0$ かつ δ がとても小さいとき，$\delta^{|n|}$ はものすごく小さいということに着目せよ．従って，直観的には，

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta^{|n|} \, |x_n - y_n| \\ &= |x_0 - y_0| + \delta(|x_1 - y_1| + |x_{-1} - y_{-1}|) + \delta^2(|x_2 - y_2| + |x_{-2} - y_{-2}|) + \cdots \\ &\text{“}=\text{”}\ |x_0 - y_0| + O(\delta) \end{aligned}$$

としてもよいだろう．また，$\mathbb{Z}$ の $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ への作用は添字のずらしなので，

$$d(k \cdot x, k \cdot y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta^{|n|} \, |x_{n+k} - y_{n+k}|$$

を得る．従って，再び，直観的には，

$$d(k \cdot x, k \cdot y) \text{ “ = ” } |x_k - y_k| + O(\delta)$$

としてもよいだろう．すると，群作用でくりこまれた距離 d_N は，

$$\begin{aligned} d_N(x,y) &= \max\left(d(-N+1 \cdot x, -N+1 \cdot y), \dots, d(x,y), \dots, d(N-1 \cdot x, N-1 \cdot y)\right) \\ &\text{“ = ” } \max\left(|x_{-N+1} - y_{-N+1}|, \dots, |x_0 - y_0|, \dots, |x_{N-1} - y_{N-1}|\right) + O(\delta) \end{aligned}$$

としてもよいだろう．さて，例 6 を鑑みれば，

$$\mathrm{Widim}_\epsilon([0,1]^{\mathbb{Z}}, d_N) \text{ “ = ” } 2N - 1 + O(\delta)$$

としてもよいだろう．すると，平均次元は

$$\dim [0,1]^{\mathbb{Z}} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathrm{Widim}_\epsilon([0,1]^{\mathbb{Z}})}{2N-1} \text{ “ = ” } \lim_{\epsilon \to 0} \frac{2N - 1 + O(\delta)}{2N-1} \text{ “ = ” } 1$$

となる．

この議論を正当化するのは ϵ-δ 論法の役目である．上からの評価 $\dim([0,1]^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}) \leq 1$ を示すには，自然な射影

$$f\colon [0,1]^{\mathbb{Z}} \longrightarrow [0,1]^{\mathbb{Z} \cap [-\ell, \ell]}$$

を用いる．これが $([0,1]^{\mathbb{Z}}, d_N)$ からの ϵ-埋め込みになるように ℓ を選んでやればよい．下からの評価 $\dim([0,1]^{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}) \geq 1$ を示すには，周期的埋め込み

$$i\colon [0,1]^{2N-1} \hookrightarrow [0,1]^{\mathbb{Z}},\ (x_{-N+1}, \dots, x_{N-1}) \mapsto (\dots, x_{N-1}, x_{-N+1}, \dots, x_{N-1}, x_{-N+1}, \dots)$$

を用いる．これが $([0,1]^{2N-1}, \max_k |x_k - y_k|)$ から $([0,1]^{\mathbb{Z}}, d_N)$ への拡大写像なので，両者の幅次元に不等式が導かれ，従って，両者の平均次元にも不等式が導かれる．

このように，詳しく考えてみると，上からの評価と下からの評価ではその証明の仕組みが根本的に異なっている．$[0,1]^{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{Z}$ から $[0,1]$ への函数の全体に広義一様収束の位相を与えたものだとみなせる．このとき，射影 f とは「コンパクト台函数での近似」であり，埋め込み i とは「周期函数の変形理論」である．我々の定理の証明はこのアイデアの延長線上にあり，前者は**無限エネルギー反自己双対接続のインスタントン近似**に，後者は**周期的反自己双対接続の無限次元変形理論**に，それぞれ対応する．

3.2 局所平均次元

この節では，定理 2 で言及した**局所平均次元 (local mean dimension)** を紹介する．この不変量は論文 [10, Section 2.2.] で導入された．

我々に親しみ深い次元の多くは局所的な定義ができる．例えば，被覆次元は局所的な概念であり，

$$\dim X = \sup_{p \in X} \left(\lim_{r \to 0} \dim B_r(p) \right)$$

が成り立つ．ただし，$B_r(p)$ は点 p を中心とする半径 r の閉球である．しかし，平均次元でこのような記述が可能かどうかは知られていない．そこで導入したのが局所平均次元である．

(X,d) をコンパクト距離空間として，無限巡回群 $\mathbb{Z}$ が連続に作用しているとせよ．$k \in \mathbb{Z}$ の $x \in X$ への作用を $k \cdot x$ とあらわす．点 $p \in X$ と正実数 $r > 0$ に対して，

$$B_r(p)_{\mathbb{Z}} := \{x \in X \mid d(n \cdot x, n \cdot p) \le r \text{ for all } n \in \mathbb{Z}\}$$

とする．$B_r(p)_{\mathbb{Z}}$ は X の閉集合である．

$$\dim_p(X : \mathbb{Z}) := \lim_{r \to 0} \left[\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{N \to \infty} \left(\frac{1}{2N-1} \sup_{k \in \mathbb{Z}} (\mathrm{Widim}_\epsilon(B_r(p)_{\mathbb{Z}}, d_{k+N})) \right) \right]$$

を**点 $p \in X$ での局所平均次元**と呼ぶ．これも X の位相と両立する距離の取り方に独立である．そして，

$$\dim_{loc}(X : \mathbb{Z}) := \sup_{p \in X} \left(\dim_p(X : \mathbb{Z}) \right)$$

を**局所平均次元**と定義する．このとき，

$$\dim_{loc}(X : \mathbb{Z}) \le \dim(X : \mathbb{Z})$$

が成り立つ．従って，局所平均次元の下からの評価は平均次元の下からの評価になる．

3.3 平均エントロピー次元

この節では**平均エントロピー次元 (mean entropy dimension)** を紹介する．この不変量は，Lindenstrauss と Weiss によって，論文 [7] で導入された．

(X,d) をコンパクト距離空間として，無限巡回群 $\mathbb{Z}$ が連続に作用しているとせよ．$k \in \mathbb{Z}$ の $x \in X$ への作用を $k \cdot x$ とあらわす．自然数 n と正実数 ϵ に対して，部分集合 $S \subset X$ が (n,ϵ)**-集約**集合であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して，点 $y \in S$ が存在して，全ての $k = 0, \ldots, n-1$ において $d(k \cdot x, k \cdot y) < \epsilon$ が成り立つこととする．(X,d) の (n,ϵ)-集約部分集合の個数の最小値を $s(X,d,\epsilon,n)$ とする．さらに，

$$S(X,d,\epsilon) := \limsup_{n \to \infty} \left[\frac{\log s(x,d,\epsilon,n)}{n} \right]$$

とおく．そして，平均エントロピー次元 $\dim_e(X,d : \mathbb{Z})$ は，

$$\dim_e(X,d : \mathbb{Z}) := \liminf_{\epsilon \to 0} \left[\frac{S(X,d,\epsilon)}{-\log \epsilon} \right]$$

により定義される．平均エントロピー次元 $\dim_e(X,d : \mathbb{Z})$ は距離 d に依存する．このとき，

$$\dim(X : \mathbb{Z}) \le \dim_e(X,d : \mathbb{Z})$$

が成り立つ．

4 Kolmogorov 複雑性と平均軌道複雑性

4.1 Kolmogorov 複雑性と再帰関数

この節では **Kolmogorov 複雑性 (Kolmogorov complexity)** について解説する．標準的参考書としては [6] があり，幾何学者に親しみやすい解説としては [12] がある．

A を二点集合 $\{0,1\}$ として，Σ を A の元の有限列の全体からなる集合とする．すなわち，

$$\Sigma := \bigcup_{j=0}^{\infty} A^j$$

であり，例えば，0 や 010101 や 000000111110010101010 は Σ の元である．また，元 $\sigma \in \Sigma$ の長さ $\ell(\sigma)$ を，$\sigma \in A^n$ のときに $\ell(\sigma) := n$ として定める．例えば，$\ell(0) = 1$ であり $\ell(010101) = 6$ である．

さて，Σ の元の「複雑さ」というものを考えたい．A.N. Kolmogroov[5, p.210] 曰く，「複雑さ」とは，

> If some object has a “simple” structure, then for its description it suffices to have a small amount of information; but if it is “complex”, then its description must contain a lot of information.

とのことである．つまり，短く言い換えることができるものは単純であり，圧縮しようとしてもなかなかできないものは複雑である．例えば，次の数列の両者

$$000000000000000000000000$$
$$011101010101101000101001$$

はどちらが「複雑」だろうか．前者は 0 が 24 個並んだものであり，後者はたった今 500 円硬貨を 24 回投げてその表裏を書いたものである．前者を伝えるためには「0 を 24 個並べよ」と短く言い換えることができるが，後者を伝えるためにはこの数列そのものを繰り返すほかないであろう．従って，Kolmogorov による情報の圧縮可能性の観点からは，前者は単純であり，後者は複雑である．このアイデアの数学的定式化が，**Kolmogorov 複雑性 (Kolmogorov complexity)** である．

定義 10. 任意の函数 $S : \Sigma \to \Sigma$ に対して，S による Kolmogorov 複雑性 $K_S : \Sigma \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を

$$K_S(\sigma) := \min\{\, \ell(p) \mid p \in \Sigma \text{ and } S(p) = \sigma \,\}$$

と定める．ただし，$\min \emptyset = \infty$ とする．

さて，この定義では函数 S に依存して複雑性 K_S が定まっている．例えば，S を変えたときに K_S はどのように変化するのだろうか．Kolmogorov のさらなる洞察は，この問と**再帰函数 (recursive function)** との関連を喝破したことである．再帰函数とは，計算論や数学基礎論における概念であり，その計算規則がアルゴリズムにより「有限的に」与えられている函数のことである．厳密な定義は，例えば，数学辞典を参照のこと．

定理 11 (A.N.Kolmogorov, G.J. Chaitin, R.J. Solomonoff)**.** 再帰函数 $U : \Sigma \to \Sigma$ が存在して，任意の再帰函数 $S : \Sigma \to \Sigma$ に対して，正定数 $C = C(U, S)$ が存在して，任意の $\sigma \in \Sigma$ に対して，

$$K_U(\sigma) \leq K_S(\sigma) + C$$

が成り立つ．再帰函数 U を**普遍再帰函数 (universal recursive function)** とよぶ．

普遍再帰函数は一意ではない．しかし，U_1 と U_2 が普遍再帰函数であるとき，定数 $C = C(U_1, U_2)$ が存在して，任意の $\sigma \in \Sigma$ に対して，

$$\left| K_{U_1}(\sigma) - K_{U_2}(\sigma) \right| \leq C$$

が成り立つことが，この定理からすぐにわかる．また，恒等写像 $id : \Sigma \to \Sigma$ は再帰函数なので，普遍再帰函数 U に対して，定数 $C = C(U)$ が存在して，任意の $\sigma \in \Sigma$ に対して，

$$K_U(\sigma) \leq \ell(\sigma) + C$$

が成り立つ．従って，長さ函数 ℓ に関して漸近的には普遍再帰函数に依らずに，Kolmogorov 複雑性は定まる．

4.2 平均軌道複雑性

この節では**平均軌道複雑性 (mean orbit complexity)** を定義する．(X, d) をコンパクト距離空間として，無限巡回群 $\mathbb{Z}$ が連続に作用しているとせよ．$k \in \mathbb{Z}$ の $x \in X$ への作用を $k \cdot x$ とあらわす．

定義 12. 写像 $C \colon \Sigma \to X$ であって，像 $C(\Sigma)$ が X で稠密なものを，X の**粗視化函数 (coarse graining function)** とよぶ．ただし，$A := \{0, 1\}$ であり，$\Sigma := \cup_{j=0}^{\infty} A^j$ だった．

この粗視化函数により，Kolmogorov 複雑性と力学系は結びつく．また，$X^* := \cup_{j=0}^{\infty} X^j$ とするとき，粗視化函数 $C \colon \Sigma \to X$ から自然に $C^* \colon \Sigma^* \to X^*$ が定まる．

ところで，Σ は可算無限集合であり，辞書式順序

$$\varepsilon \leftrightarrow 0, \quad 0 \leftrightarrow 1, \quad 1 \leftrightarrow 2, \quad 00 \leftrightarrow 3, \quad 01 \leftrightarrow 4, \quad 10 \leftrightarrow 5, \quad 11 \leftrightarrow 6, \ldots$$

によって，自然数のなす集合 $\mathbb{N}$ との標準的な全単射が定まる．また，$\Sigma^* := \cup_{j=0}^{\infty} \Sigma^j$ とするとき，Σ^* も可算無限集合であり，$\mathbb{N}$ との全単射が辞書式順序によって標準的に定まる．従って，標準的な全単射 $Q \colon \Sigma \to \Sigma^*$ が存在する．

さて，$S : \Sigma \to \Sigma$ を普遍再帰函数とするとき，これまでをまとめれば，粗視化函数 $C \colon \Sigma \to X$ を選ぶごとに，写像列

$$\Sigma \xrightarrow{S} \Sigma \xrightarrow{Q} \Sigma^* \xrightarrow{C^*} X^*$$

が定まることになる．この合成写像を $U_C = U := C^* \circ Q \circ S : \Sigma \to X^*$ とする．U によって，有限二進列 p は，X の点列 $U(p) := (U_1(p), \ldots, U_{n-1}(p))$ として解釈することができる．

定義 13. 任意の点 $x \in X$ と自然数 n と正実数 ϵ に対して，

$$K_C(x, \epsilon, n) := \min\{\, \ell(p) \mid d(j \cdot x,\ U_j(p)) < \epsilon \text{ for any } j = 0, \ldots, n-1 \,\}$$

と定める．

像 $C(\Sigma)$ の X での稠密性と普遍再帰函数 S の全射性により，常に $K_C(x, \epsilon, n)$ は有限である．

さらに，

$$\overline{K}_C(x, \epsilon) := \limsup_{n \to \infty} \left[\frac{K_I(x, \epsilon, n)}{n} \right], \quad \underline{K}_C(x, \epsilon) := \liminf_{n \to \infty} \left[\frac{K_I(x, \epsilon, n)}{n} \right]$$

として，

$$\overline{K}_C(x) := \liminf_{\epsilon \to 0} \left[\frac{\overline{K}_C(x, \epsilon)}{-\log \epsilon} \right], \quad \underline{K}_C(x) := \liminf_{\epsilon \to 0} \left[\frac{\underline{K}_C(x, \epsilon)}{-\log \epsilon} \right]$$

と定める．

そして，平均軌道複雑性は次で定義される．

定義 14. X の平均軌道複雑性 $\overline{MK} \colon X \to \mathbb{R}$ と $\underline{MK} \colon X \to \mathbb{R}$ を，

$$\overline{MK}(x : \mathbb{Z}) := \sup_C \overline{K}_C(x), \quad \underline{MK}(x : \mathbb{Z}) := \sup_C \underline{K}_C(x).$$

により，定義する．ただし，$\sup_C$ では粗視化函数 C の全体を動くものとする．

このとき，次が成り立つ．

定理 15 (M)**.** X の任意の点 x に対して，

$$\underline{MK}(x:\mathbb{Z}) \le \overline{MK}(x:\mathbb{Z}) \le \dim_e(X,d:\mathbb{Z})$$

が成り立つ．

この定理の証明や平均軌道複雑性のさらなる性質については，論文 [8] を参照ください．

5 ゲージ理論の速成コース

この節ではゲージ理論の設定と用語を紹介する．この予稿ではゲージ理論とは四次元 Yang-Mills ゲージ理論のことである．決定的参考文献は [3] である．

X を有向四次元 Riemann 多様体として，$P \to X$ を SU(2)-主束とせよ．P の束写像を**ゲージ変換**とも呼ぶ．SU(2) の $\mathfrak{su}(2)$ への随伴表現による P の誘導束を $\mathfrak{g}_P$ として，$\mathfrak{g}_P$ に値を持つ j 次微分形式の空間を $\Omega^j(\mathfrak{g}_P)$ とする．P の接続の全体は $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ 上のアフィン空間であり，曲率は $\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ の元だった．また，曲率の L^2 ノルムの二乗を**エネルギー**と呼ぶ．

X の向き付けと Riemann 計量から Hodge 作用素 $*\colon \Omega^2(\mathfrak{g}_P) \to \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ が定まり，X は四次元なので $*$ は包合的 ($*^2 = id$) である．従って，$\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ は $*$ の固有空間に直交直和分解

$$\Omega^2(\mathfrak{g}_P) = \underbrace{\Omega^+(\mathfrak{g}_P)}_{*=+id} \oplus \underbrace{\Omega^-(\mathfrak{g}_P)}_{*=-id}$$

する．$\Omega^+(\mathfrak{g}_P)$ と $\Omega^-(\mathfrak{g}_P)$ の元をそれぞれ**自己双対形式**と**反自己双対形式**と呼ぶ．

定義 16. P の接続 A が**反自己双対接続 (Anti-Self-Dual connections, ASD 接続)** であるとは，その曲率 F_A が反自己双対形式であること，すなわち，**反自己双対方程式**

$$F_A + *F_A = 0$$

が成り立つこととする．特に，有限エネルギー反自己双対接続を**インスタントン**と呼ぶ．A が反自己双対接続ならば，任意のゲージ変換 $g\colon P \to P$ に対して，$g(A)$ も反自己双対接続になる．反自己双対接続のゲージ同値類からなる集合 $\mathcal{M}$ を，**反自己双対接続のモジュライ空間**と呼ぶ．

反自己双対方程式は接続に対する一階非線形偏微分方程式である．**これは楕円型ではない．** また，閉多様体上の任意の ASD 接続はインスタントンである．

さて，形式的な描像を導入する．

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &:= P \text{ 上の SU(2)-接続全体のなす無限次元アフィン空間}\\ \mathcal{G} &:= P \text{ のゲージ変換全体のなす群}\\ \Omega^+(\mathfrak{g}_P) &:= \text{自己双対形式全体のなす無限次元ベクトル空間}\end{aligned}$$

を考えよう．$\mathcal{G}$ は $\mathcal{A}$ に作用する．$M := \mathcal{A}/\mathcal{G}$, $E := \mathcal{A} \times_{\mathcal{G}} \Omega^+(\mathfrak{g}_P)$ と定義する．このとき，E は M 上の「ベクトル束」である．また，曲率の自己双対部分を取る写像 $\mathcal{A} \ni A \mapsto F_A^+ \in \Omega^+(\mathfrak{g}_P)$ はゲージ同変だったので，ベクトル束 $E \to M$ の「切断」と考えられる．この切断の零点集合は $\{A \in \mathcal{A} \mid F_A^+ = 0\}/\mathcal{G}$ であり，これはすなわ

ちモジュライ空間 $\mathcal{M}$ である．

$$\begin{array}{c} E := \mathcal{A} \times_{\mathcal{G}} \Omega^+(\mathfrak{g}_P) \\ {\scriptstyle A \mapsto F_A^+} \big\uparrow \big\downarrow \\ M := \mathcal{A}/\mathcal{G} \supset \{A \in \mathcal{A} \mid F_A^+ = 0\}/\mathcal{G} = \mathcal{M} \end{array}$$

さて，$\mathcal{M}$ は何次元だろうか．$\mathcal{M}$ はベクトル束の切断の零点集合なので，その次元は，形式的には，底空間の次元とベクトル束の階数の差と考えてもよいだろう．しかし，両者は共に無限大である．

$$\dim \mathcal{M} = \dim M - \operatorname{rank} E = \infty - \infty = \ ???$$

無限と無限の差は，有限か，無限か，意味がないか，そのどれかである．

X が**コンパクト**四次元多様体のとき，Atiyah-Hitchin-Singer の論文 [1] が金字塔である．彼らは，$\mathcal{M}$ に自然な位相を与え，そして，インスタントンの変形理論を構築することにより，$\mathcal{M}$ の被覆次元は有限であることを示した．

$$\dim \mathcal{M} = \dim M - \operatorname{rank} E = \infty - \infty \lneqq \infty$$

しかし，X が**非コンパクト**四次元多様体のとき，その状況は根本的に異なる．もはや無限と無限の差は有限とは限らない．例えば，我々のモジュライ空間 $\mathcal{M}_d$ の被覆次元は無限大である．

$$\dim \mathcal{M}_d = \dim M - \operatorname{rank} E = \infty - \infty = \infty$$

だが，我々は，$\mathcal{M}_d$ に自然な位相を与え，そして，無限エネルギー ASD 接続のインスタントン近似と周期的 ASD 接続の無限次元変形理論を構築することにより，$\mathcal{M}_d$ の**平均次元**ならば有限確定値であることを示した．

$$\dim(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) = \frac{\dim \mathcal{M}_d}{|\mathbb{Z}|} = \frac{\infty - \infty}{\infty} \lneqq \infty$$

6　論文 [10] の主定理の証明の方針

この節では論文 [10] の主定理の証明の方針を解説する．設定や主張などはこの予稿の第 2 節で述べた．基本のアイデアは例 3 と同じであり，眼目は**無限エネルギー ASD 接続のインスタントン近似**と**周期的 ASD 接続の無限次元変形理論**の確立である．技術的な最大の障壁は ASD 方程式が楕円型ではないことにある．閉多様体上では Coulomb ゲージを取ることでその障壁は乗り越えられた．しかし，我々の状況ではおそらく Coulomb ゲージは存在しない．詳細は論文 [10] を参照していただきたい．

6.1　上からの評価：インスタントン近似

まずは定理 1 の $\dim(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) \lneqq \infty$ について解説しよう．$\mathcal{M}_d$ の位相と両立する距離を dist とせよ．ここでは詳しく述べないが dist は慎重に選ぶ必要がある．$\mathcal{M}_d$ の平均次元を上から評価するためには，各正実数 ϵ と各自然数 N に対して，$\mathrm{Widim}_\epsilon(\mathcal{M}_d, \mathrm{dist}_N)$ を上から評価せねばならない．従って，$(\mathcal{M}_d, \mathrm{dist}_N)$ から有限多面体への ϵ-埋め込みを系統的に構成する必要がある．そのために**無限エネルギー ASD 接続のインスタントン近似**を用いる．

非負実数 $c \geq 0$ に対して，空間 $\mathcal{M}(c)$ を，次の二条件を課したゲージ同値類 $[\mathbf{A}]$ の集合として定義する：

1. $\mathbf{A}$ は P 上の ASD 接続である．
2. $\mathbf{A}$ は曲率条件
$$\int_X |F_{\mathbf{A}}|^2 \, d\mathrm{vol} \le 8\pi^2 c$$
を充たす．

条件 2. では L^2 ノルムを用いていることに注意していただきたい．従って，$\mathcal{M}(c)$ の元はインスタントンである．Atiyah-Singer の指数定理より，
$$\dim \mathcal{M}(c) \le 8c$$
がわかる．各自然数 N に対して，非負実数 c を適切に選び，モジュライ空間 $(\mathcal{M}_d, \mathrm{dist}_N)$ から $\mathcal{M}(c)$ への ϵ-埋め込みを構成するのが目標である．$[\mathbf{A}]$ を $\mathcal{M}_d$ の元とする．十分大きな正実数 $T \gg 0$ に対して，$\mathbf{A}$ を $S^3 \times [-T, T]$ の外で切り捨て平坦接続とつなぎ，P 上の新しい接続 $\mathbf{A}'$ を構成する．$\mathbf{A}$ も平坦接続も反自己双対接続だが，一般には $\mathbf{A}'$ は反自己双対接続とは限らない. そこで，$\mathbf{A}'$ を摂動して，反自己双対接続 $\mathbf{A}''$ を構成する．ここで非線型偏微分方程式である反自己双対方程式を解く必要がある．さて，このとき，L と D を N に独立に適切に選び，$T := N + L + D$ とすることで，
$$\left|\mathbf{A} - \mathbf{A}''\right| \le \epsilon/4 \quad \text{for } |t| \le N + L$$
$$\frac{1}{8\pi^2} \int_X \left|F(\mathbf{A}'')\right|^2 \, d\mathrm{vol} \le \frac{2Td^2}{8\pi^2} \mathrm{vol}(S^3) + C$$
が充たすようにできる．ただし，C は d だけに依存する定数である．すなわち，無限エネルギー ASD 接続 $\mathbf{A}$ に十分近いインスタントン $\mathbf{A}''$ を構成した．換言すれば，**インスタントン近似写像**
$$\mathcal{M}_d \to \mathcal{M}\left(\frac{2Td^2}{8\pi^2} \mathrm{vol}(S^3) + C\right), \quad [\mathbf{A}] \mapsto [\mathbf{A}'']$$
が構成されたことになる．これは $(\mathcal{M}_d, \mathrm{dist}_N)$ から $\mathcal{M}(c)$ への ϵ-埋め込みになる．従って，
$$\mathrm{Widim}_\epsilon(\mathcal{M}_d, \mathrm{dist}_N) \le \dim \mathcal{M}\left(\frac{2Td^2}{8\pi^2} \mathrm{vol}(S^3) + C\right) \le \frac{2Td^2}{\pi^2} \mathrm{vol}(S^3) + 8 \cdot C$$
を得る．$T = N + L + D$ であり，L と D は N に独立だったので，
$$\dim(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z}) = \lim_{\epsilon \to 0} \lim_{N \to \infty} \frac{\mathrm{Widim}_\epsilon(\mathcal{M}_d, \mathrm{dist}_N)}{2N + 1} \le \frac{d^2}{\pi^2} \mathrm{vol}(S^3) \lneq \infty$$
を得る．しかし，実は，**この証明はそのままではうまくいかない**．問題は $\mathbf{A}$ から $\mathbf{A}'$ を構成する切り捨てにある．これはゲージ同変な操作ではない．その処理が我々の考察の骨子の一つである．

6.2　下からの評価：変形理論

次に定理 2 の $8\rho(\mathbf{A}) \le \dim_{[\mathbf{A}]}(\mathcal{M}_d : \mathbb{Z})$ について解説する．$\mathcal{M}_d$ の元 $[\mathbf{A}]$ を，無限巡回群 $\mathbb{Z}$ の作用で不変であり，平坦ではなく，$\|F_{\mathbf{A}}\|_{L^\infty} < d$ を充たす周期的 ASD 接続のゲージ同値類とする．このとき，空間 V を
$$V := \left\{a \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P) \mid (d_{\mathbf{A}}^* + d_{\mathbf{A}}^+)\, a = 0, \|a\|_{L^\infty} < \infty\right\}$$
と定めれば，$(V, \|\cdot\|_\infty)$ は無限次元 Banach 空間になり，無限巡回群 $\mathbb{Z}$ が連続に作用する．V は「$[\mathbf{A}]$ の変形の空間」である．$B_r(V)$ を原点中心で半径 r の V の閉球として，広義一様収束の位相を与えなおす．すると，**周**

期的 ASD 接続の無限次元変形理論を構築することにより，r が十分小さいときに，無限巡回群 $\mathbb{Z}$ の作用で同変な位相的埋め込み $B_r(V) \to \mathcal{M}_d$ が存在するとわかる．よって，

$$\dim_0 (B_r(V) : \mathbb{Z}) \leq \dim_{[\mathbf{A}]} (\mathcal{M}_d : \mathbb{Z})$$

を得る．また，各自然数 n に対して，無限巡回群 $n\mathbb{Z}$ の作用で不変な V の部分空間を V_n とする．Atiyah-Singer の指数定理により

$$\dim V_n = 8n\,\rho(\mathbf{A})$$

と計算できる．すなわち，直観的には，「単位長さあたりの変形の自由度」は，少なくとも，

$$\frac{\dim V_n}{n} = \frac{8n\,\rho(\mathbf{A})}{n} = 8\rho(\mathbf{A})$$

である．従って，

$$8\rho(\mathbf{A}) \leq \dim_0 (B_r(V) : \mathbb{Z})$$

を得る．これらを合わせて，

$$8\rho(\mathbf{A}) \leq \dim_{[\mathbf{A}]} (\mathcal{M}_d : \mathbb{Z})$$

が示せる．

A は本質的には閉多様体 $S^3 \times S^1$ 上のインスタントンなので，その小変形は従来の理論で構成できる．しかし，ここでは変形を「一様に」構成することが本質的であり，その処理が我々の考察のもう一つの骨子である．また，簡単のために，この節では [**A**] を無限巡回群 $\mathbb{Z}$ の作用で不変としたが，この仮定は外すことができる．

参考文献

[1] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, and I. M. Singer. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, Vol. 362, No. 1711, pp. 425–461, 1978.

[2] S. K. Donaldson. An application of gauge theory to four-dimensional topology. *J. Differential Geom.*, Vol. 18, No. 2, pp. 279–315, 1983.

[3] S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer. *The geometry of four-manifolds*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1990. Oxford Science Publications.

[4] Misha Gromov. Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps. I. *Math. Phys. Anal. Geom.*, Vol. 2, No. 4, pp. 323–415, 1999.

[5] A. N. Kolmogorov. *Izbrannye trudy. Tom 3*. “Nauka”, Moscow, 2005. Teoriya informatsii i teoriya algoritmov. [Information theory and the theory of algorithms], Edited by A. N. Shiryaev.

[6] Ming Li and Paul Vitányi. *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications*. Texts in Computer Science. Springer, New York, third edition, 2008.

[7] Elon Lindenstrauss and Benjamin Weiss. Mean topological dimension. *Israel J. Math.*, Vol. 115, pp. 1–24, 2000.

[8] Shinichiroh Matsuo. Mean dimension and Kolmogorov complexity of orbits in dynamical systems. preprint.

[9] Shinichiroh Matsuo. *On the Runge theorem for instantons*. PhD thesis, University of Tokyo, 2010.

[10] Shinichiroh Matsuo and Masaki Tsukamoto. Instanton approximation, periodic ASD connections, and mean dimension. arXiv:0909.1141.

[11] Clifford Henry Taubes. Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. *J. Differential Geom.*, Vol. 25, No. 3, pp. 363–430, 1987.

[12] Shmuel Weinberger. *Computers, rigidity, and moduli*. M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. The large-scale fractal geometry of Riemannian moduli space.